



**DEPARTEMENT  
BILDUNG, KULTUR UND SPORT**  
Abteilung Berufsbildung und Mittelschule  
Sektion Mittelschule

**MITTELSCHULEN AARGAU**

**AUFNAHMEPRÜFUNG GYMNASIUM**

---

**Mathematik**

---

Lösungen 2023

## LÖSUNGEN AUFNAHMEPRÜFUNG GYMNASIUM AARGAU 2023

### Mathematik, 1. Serie

#### Allgemeine Korrekturhinweise für die Aufnahmeprüfung Mathematik

- Formfehler (bei richtiger Rechnung vergessene Klammerzeichen, unberechtigte Gleichheitszeichen, ...) geben keine Abzüge.
- Pro Serie wird **genau einmal** ein Fehler der folgenden Art ohne Abzug toleriert (sofern dadurch der Lösungsweg nicht wesentlich vereinfacht wird).
  - Abschreibfehler oder Übertragungsfehler, sofern keine Termumformungen darin enthalten sind.
  - Falsche Masse oder andere kleine Fehler bei Konstruktionen, die vergleichbar sind mit Abschreibfehlern.
  - Vergessene oder falsche Einheiten beim Schlussresultat.
  - Falsch oder von der Vorgabe abweichend gerundete Schlussresultate.
- Die folgenden Fehler geben jeweils einen Abzug von 0.5 Punkten:
  - Rechnungsfehler, Vorzeichenfehler.
  - Vergessene oder falsche Einheiten beim Schlussresultat.
  - Falsch oder von der Vorgabe abweichend gerundete Schlussresultate.
- Existieren zu einer Aufgabe mehrere Lösungsansätze und Ergebnisse, so werden für die entsprechenden Aufgaben keine Punkte verteilt.
- Eine richtige, durch Erraten erhaltene Lösung ergibt keine Punkte.
- Wird eine Aufgabe nach einem Rechen- oder Konstruktionsfehler korrekt fertig gelöst, so werden die dem Fehler nachfolgenden Lösungsschritte entsprechend dem Korrekturschema bewertet (sofern durch den Fehler der Lösungsweg nicht wesentlich vereinfacht wird).
- Kann bei einer Aufgabe ein Zwischenschritt nicht berechnet oder konstruiert werden oder wird dazu ein falscher Lösungsansatz oder eine falsche Gleichung verwendet, so ergeben die nachfolgenden, auf diesem Zwischenschritt aufbauenden Lösungsschritte keine Punkte.

**Aufgabe 1:**

a)  $\frac{10a+5b}{15a-5b} \cdot \frac{9a^2-b^2}{2a+b}$

Zähler 1. Bruch faktorisiert:	$5(2a+b)$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Nenner 1. Bruch faktorisiert:	$5(3a-b)$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Zähler 2. Bruch faktorisiert:	$(3a+b)(3a-b)$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Alle Faktoren korrekt gekürzt:	$3a+b$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$

b)  $\frac{3x+12}{2x^2+4x-16} - \frac{3}{3x-6}$

1.Bruch korrekt faktorisiert und gekürzt:	$\frac{3(x+4)}{2(x+4)(x-2)} = \frac{3}{2(x-2)}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
2.Bruch korrekt faktorisiert und gekürzt:	$\frac{3}{3(x-2)} = \frac{1}{x-2}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Hauptnenner bestimmt	$2(x-2)$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Brüche gleichnamig gemacht und subtrahiert:	$\frac{3-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2(x-2)} = \frac{1}{2x-4}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$

oder

Hauptnenner bestimmt:	$6(x+4)(x-2)$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Brüche gleichnamig gemacht und subtrahiert:	$\frac{3(3x+12)-6(x+4)}{6(x+4)(x-2)}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Zähler zusammengefasst:	$\frac{3x+12}{6(x+4)(x-2)}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Zähler faktorisiert und alle Faktoren korrekt gekürzt:	$\frac{3(x+4)}{6(x+4)(x-2)} = \frac{1}{2(x-2)} = \frac{1}{2x-4}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Das vollständig gekürzte Endresultat kann faktorisiert oder ausmultipliziert angegeben werden.

**Aufgabe 2:**

a)  $\frac{5-x}{x^2-12x+36} = 1 - \frac{2x-9}{2x-12}$

Hauptnenner bestimmt:  $2(x-6)^2 \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Mit HN multipliziert:  $2(5-x) = 2(x-6)^2 - (2x-9)(x-6) \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Ausmultipliziert:  $10-2x = 2x^2-24x+72-2x^2+12x+9x-54 \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Resultat  $x=8 \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

b) Vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}}{\frac{b-a}{a}+1}$$

Zähler faktorisiert:  $\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Zähler vereinfacht:  $\frac{a-b}{a+b} \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Nenner gleichnamig gemacht und vereinfacht:  $\frac{b-a+a}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Mit Kehrwert multipliziert:  $\frac{a(a-b)}{b(a+b)}$  oder  $\frac{a^2-ab}{ab+b^2} \Rightarrow 0.5 \text{ P}$

### Aufgabe 3:

In einer Urne liegen 40 Kugeln. Je vier Kugeln sind beschriftet mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, ..., 9.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Ziehen eine Kugel mit der Ziffer 9 zu ziehen??

$$P(9) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10 \% \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem Ziehen mit Zurücklegen genau zweimal die Ziffer 4 zu ziehen?

$$P(4, 4) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$
$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01 = 1 \% \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

- c) Nun werden hintereinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man dreimal dieselbe Zahl zieht?

$$P(0, 0, 0) = P(1, 1, 1) = \dots = P(9, 9, 9) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470} \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$
$$P(\text{dreimal dieselbe Zahl}) = 10 \cdot \frac{1}{2470} \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$
$$\text{Resultat: } \frac{1}{247} \approx 0.0040 = 0.4 \% \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

Als korrektes Resultat gilt jeweils der gekürzte Bruch, die Dezimalzahl oder die Prozentzahl.

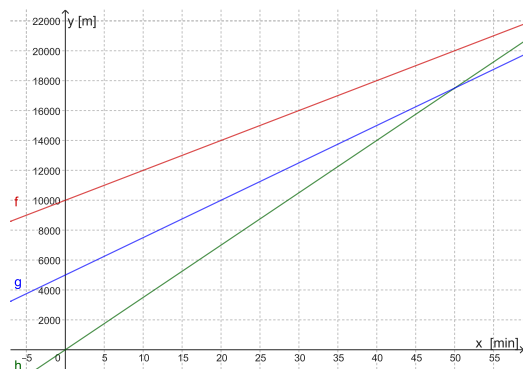
#### Aufgabe 4:

Drei Jugendliche machen auf einer flachen Strecke in den Niederlanden ein Velorennen über eine Strecke von 30 Kilometern. Person A fährt dieses Rennen mit einer Geschwindigkeit von 350 m/min, diejenige von Person B beträgt 250 m/min und diejenige von Person C beträgt 200 m/min. Um das Rennen fairer zu gestalten, vereinbaren sie für Person B einen Vorsprung von 5 Kilometern und für Person C einen Vorsprung von 10 Kilometern.

Für die Personen A und C beschreiben die folgenden Funktionsgleichungen ihre Entfernung vom Startpunkt  $y$  in Metern in Abhängigkeit der Zeit  $x$  in Minuten:

- Person A:  $y = 350 \cdot x$
- Person C:  $y = 200 \cdot x + 10\,000$

In der folgenden Abbildung siehst du die zur Situation passenden Graphen.



Rechne immer mit ungerundeten Werten weiter und runde Endresultate auf eine Nachkommastelle.

- a) Ordne den Personen A, B und C die Graphen der Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  in der Abbildung zu.

$$A \cong h \qquad B \cong g \qquad C \cong f \qquad \Rightarrow 0.5 \text{ P wenn alles korrekt}$$

- b) Bestimme eine passende Funktionsgleichung für Person B.

$$y = 250x + 5\,000 \qquad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

- c) Welchen Prozentanteil der Gesamtstrecke hat Person A nach 25 Minuten zurückgelegt?

$$y = 350 \cdot 25 = 8\,750 \qquad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

$$\frac{8\,750}{30\,000} = \frac{7}{24} \approx 29.2\% \qquad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

Das Resultat gilt auch als korrekt, wenn es vor der Angabe in Prozenten auf eine Kommastelle gerundet und erst dann in Prozenten angegeben:

$$\frac{8\,750}{30\,000} = \frac{7}{24} \approx 0.3 = 30\%$$

- d) Wie viele Minuten nach Beginn des Rennens erreicht Person C das Ziel? Löse diese Aufgabe durch Aufstellen und Lösen einer passenden Gleichung.

$$30\,000 = 200x + 10\,000 \qquad \Rightarrow 0.5 \text{ P für korrekte Gleichung}$$

$$\Leftrightarrow 20\,000 = 200x \Leftrightarrow x = 100 \qquad \Rightarrow 0.5 \text{ P für korrektes Resultat}$$

Wenn jemand nur durch Ausprobieren auf die Lösung  $x = 100$  kommt und dies rechnerisch zeigt, erhält er 0.5 P.

- e) In der Abbildung sieht man, dass Person *B* von Person *A* überholt wird. Auch Person *C* wird von Person *A* noch vor dem Ziel überholt. Wie viele Meter vor dem Ziel überholt Person *A* Person *C*?

$$350x = 200x + 10\,000 \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

$$\Leftrightarrow 150x = 10\,000 \Leftrightarrow x = \frac{200}{3} \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

$$350 \cdot \frac{200}{3} = \frac{70\,000}{3} \approx 23\,333.3 \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

$$30\,000 - \frac{70\,000}{3} = \frac{20\,000}{3} \approx 6\,666.7 \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P}$$

### Aufgabe 5:

- a) Im Zeitraum von 1960 - 2021 ist das Gesamtvolumen aller Schweizer Gletscher von  $100.34 \text{ km}^3$  auf  $52.46 \text{ km}^3$  gesunken. Wie viele Prozente des ursprünglichen Volumens waren im Jahre 2021 noch vorhanden? Runde das Endresultat auf eine Stelle nach dem Komma.

$$\frac{52.46}{100.34} = 0.5228 \dots \approx 52.3 \% \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P für den Bruch, } 0.5 \text{ P für die Prozentzahl}$$

- b) Von 1850 - 2021 haben die Schweizer Gletscher 60 Prozent ihres Volumens verloren. Wie gross war das Gletschervolumen im Jahr 1850?

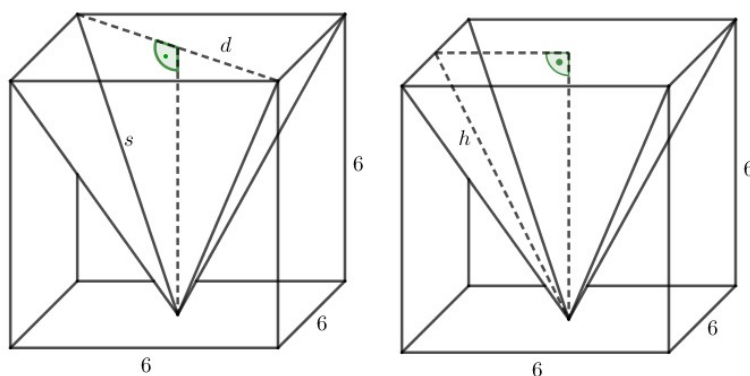
$$52.46 \cdot \frac{100}{40} = 131.15 \text{ km}^3 \quad \Rightarrow 0.5 \text{ P für die Rechnung, } 0.5 \text{ P für das Resultat}$$

Andere Lösungswege, welche zum gleichen Resultat führen, ergeben ebenfalls die volle Punktzahl.



### Aufgabe 6:

Aus einem Würfel mit Kantenlänge 6 cm wird eine regelmässige, quadratische Pyramide mit Höhe 6 cm ausgeschnitten.



a) Berechne das Volumen des so entstandenen Körpers.

Idee:	$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Pyramide}}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Rechnung:	$V_{\text{Körper}} = 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 144 \text{ cm}^3$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$

b) Berechne die Länge  $s$  einer Seitenkante der Pyramide.

Würfelflächendiagonale:	$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8.49 \text{ cm}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Seitenkante Pyramide - Idee:	$s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 6^2}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Seitenkante Pyramide - Resultat:	$s = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{72}}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{54} \approx 7.3 \text{ cm}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$

c) Berechne die gesamte Oberfläche des Körpers.

Höhe Dreieck:	$h = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \approx 6.7 \text{ cm}$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Fläche Dreieck:	$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{45} \approx 20.1 \text{ cm}^2$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$
Oberfläche Körper - Resultat:	$O_{\text{Körper}} = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{45}\right) \approx 260.5 \text{ cm}^2$	$\Rightarrow 0.5 \text{ P}$

Andere Lösungswege, welche zum gleichen Resultat führen, ergeben ebenfalls die volle Punktzahl.

### Allgemeine Hinweise

- Wird ein falsches Resultat in einer der folgenden Aufgaben im weiteren Verlauf der Aufgabe korrekt weiterverwendet, so gilt dies als Folgefehler. Es gibt keinen weiteren Punkteabzug.
- Weiterrechnen mit gerundeten Resultaten hat einmalig einen Abzug von 0.5 P zur Folge.